

1 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

Exercice 1 ★ Dérivée d'un produit de deux matrices –

Soit $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto M(t)$ une fonction dérivable.

1. Démontrer que la fonction $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto M(t)M(t)^T$ est dérivable.
2. On suppose pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $M(t)$ est orthogonale. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M'(t)M(t)^T$ est antisymétrique.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3436]

Exercice 2 ★★ Dérivée de la norme –

Soit I un intervalle, E un espace vectoriel euclidien muni de la norme $\|\cdot\|$ issue du produit scalaire et $f : I \rightarrow E$ dérivable. On suppose de plus que f ne s'annule pas et on pose, pour tout $t \in I$, $g(t) = \|f(t)\|$. Démontrer que g est dérivable et donner g' .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1753]

Exercice 3 ★★★ Calcul d'un déterminant par dérivation –

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2/2 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $D'_n(x)$.
2. En déduire $D_n(x)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3439]

Exercice 4 ★★★ Inégalité des accroissements finis pour un espace euclidien –

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f : [a, b] \rightarrow E$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. En considérant $\phi(t) = \langle f(b) - f(a), f(t) \rangle$, démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a)\|f'(c)\|.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1751]

Exercice 5 ★★★ Inégalité des accroissements finis vectorielle –

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : [a, b] \rightarrow E$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables sur $]a, b[$ et que pour tout $t \in [a, b]$, $\|f'(t)\| \leq g'(t)$. Soit $\varepsilon > 0$ et

$$A_\varepsilon = \{x \in [a, b]; \forall t \in [a, x], \|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a)\}.$$

1. Justifier que A_ε admet une borne supérieure, puis que $\sup(A_\varepsilon) \in A_\varepsilon$.
2. Démontrer que $\sup A_\varepsilon = b$.
3. En déduire que $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1752]

2 Intégration des fonctions à valeurs vectorielles

Exercice 6 ★ Pour comprendre l'intégration vectorielle –

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (1/\sqrt{1-t^2}, 2t)$ et $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$. Calculer

$$p\left(\int_0^{1/2} f(t) dt\right).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3438]

Exercice 7 ★★ Intégrale d'une fonction à image dans un sous-espace –

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E , $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue par morceaux. On suppose que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \in F$. Démontrer que $\int_a^b f(t) dt \in F$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3437]

Exercice 8 ★★ Majoration d'une intégrale –

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(a) = 0$. Démontrer que

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1755]

Exercice 9 ★★★★★ Norme d'une intégrale égale à l'intégrale de la norme –

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f : [a, b] \rightarrow E$ continue. On suppose que

$$\int_a^b \|f(t)\| dt = \left\| \int_a^b f(t) dt \right\|.$$

On note u le vecteur unitaire de E défini par

$$u = \frac{\int_a^b f(t) dt}{\int_a^b \|f(t)\| dt}.$$

Pour tout $t \in [a, b]$, on décompose $f(t)$ dans la somme directe $\mathbb{R}u \oplus (\mathbb{R}u)^\perp$ sous la forme $f(t) = \alpha(t)u + v(t)$.

1. Démontrer que α et v sont continues sur $[a, b]$.
2. Démontrer que $\int_a^b v(t) dt$ est orthogonal à u .
3. Démontrer que $\int_a^b \alpha(t) dt = \int_a^b \|f(t)\| dt$.
4. Démontrer que, pour tout $t \in [a, b]$, $\alpha(t) \leq \|f(t)\|$.
5. En déduire que, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) = \|f(t)\|u$.
6. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose pas que E est euclidien ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1754]

Exercice 10 ★★★★★ Théorème du relèvement –

Soit $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , telle que $|f(t)| = 1$ pour tout $t \in I$. On souhaite prouver l'existence de $\alpha \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $t \in I$, on ait

$$f(t) = e^{i\alpha(t)}.$$

1. Montrer que si α_1 et α_2 sont deux solutions du problème, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $t \in I$, $\alpha_1(t) = \alpha_2(t) + k2\pi$.
2. Soit $t_0 \in I$ et α_0 un argument de $f(t_0)$. En considérant

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{1}{i} \int_{t_0}^t \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

démontrer que le problème admet bien une solution.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1756]

Exercice 11 ★★★★★ Inégalités de Kolmogorov –

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que f et f'' sont bornées.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Démontrer que

$$\|f'(x)\| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{h} + \frac{h\|f''\|_\infty}{2}.$$

2. En déduire que

$$\|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{\|f\|_\infty\|f''\|_\infty}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1757]

3 Rappel sur la dérivation des fonctions à valeurs scalaires

Exercice 12 ★★★★★ Un problème de tangente –

Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = 1/x$ admettent une unique tangente commune.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[328]

Exercice 13 ★★★★★ Rolle itéré –

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable.

1. On suppose que f s'annule en $(n+1)$ points distincts de $[a, b]$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

2. On suppose que $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[323]

Exercice 14 ★★★★★ Fonction \mathcal{C}^∞ avec une infinité de zéros s'accumulant en 0 –

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans $]0, +\infty[$ telle que : $x_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et $f(x_n) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3435]

Exercice 15 ★★★★★ Théorème de Darboux –

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , et f une fonction dérivable sur I . On veut prouver que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

1. Pourquoi n'est-ce pas trivial ?

2. Soit $(a, b) \in I^2$, tel que $f'(a) < f'(b)$, et soit $z \in]f'(a), f'(b)[$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel $h \in]0, \alpha]$, on ait :

$$\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) < z < \frac{1}{h}(f(b+h) - f(b)).$$

3. En déduire l'existence d'un réel $h > 0$ et d'un point y de I tels que :

$$y+h \in I \text{ et } \frac{1}{h}(f(y+h) - f(y)) = z.$$

4. Montrer qu'il existe un point x de I tel que $z = f'(x)$.

5. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

6. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \in]0, 1]$ et par $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$. f' est-elle continue sur $[0, 1]$? Déterminer $f'([0, 1])$. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 16 ★★★★★ **Un grand classique ! –**

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, on a $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n(1/x)$ où $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que f est C^∞ sur \mathbb{R} .

Indication ▼ Correction ▼

[348]

Exercice 17 ★★★★★ **Contrôle des dérivées –**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et $\lambda > 0$ vérifiant :

$$\begin{cases} f^{(n)}(0) = 0 \text{ pour tout entier } n \geq 0 \\ \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}| \leq \lambda^n n! \end{cases}$$

1. Montrer que $f = 0$ sur l'intervalle $]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$.
2. Montrer que $f = 0$ sur \mathbb{R} .

Indication ▼ Correction ▼

[597]

Exercice 18 ★★★★★ **Une suite récurrente –**

On considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où f la fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{4} \sin \frac{1}{x}$.

1. Déterminer $I = f(\mathbb{R}^*)$, et montrer que I est stable par f .
2. Démontrer qu'il existe $\gamma \in I$ tel que $f(\gamma) = \gamma$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in I$,

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

4. Démontrer que (u_n) converge vers γ .

Indication ▼ Correction ▼

[752]

4 Rappels sur l'intégration des fonctions à valeurs scalaires

Exercice 19 ★★★★★ **Toutes les intégrales sont nulles –**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$, on a $\int_\alpha^\beta f(x) dx = 0$. Montrer que $f = 0$.

Indication ▼ Correction ▼

[404]

Exercice 20 ★★★★★ **Une drôle d'égalité –**

Soit f une fonction de classe C^1 réalisant une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

1. Justifier que f est strictement croissante.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$xf(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt.$$

3. En déduire que, pour tout $(x, y) \in [0, +\infty]^2$, on a

$$xy \leq \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f^{-1}(t) dt.$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[406]

Exercice 21 ★★ **Produit –**

Déterminer la limite de

$$v_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (k+n)^{1/n}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[409]

Exercice 22 ★★★ **Strictement croissante –**

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (f(t))^n dt = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[416]

Exercice 23 ★★★★★ **Cesaro pour les intégrales –**

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie a en $+\infty$. Montrer que

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \rightarrow a \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[418]

Exercice 24 ★★★★★ **Logarithme intégral au carré –**

1. Soient I, J des intervalles de \mathbb{R} , soit $a \in I$, soit $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $u, v : J \rightarrow I$ de classe C^1 et

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} h(t) dt.$$

Exprimer F en fonction de $f : x \mapsto \int_a^x h(t) dt$. En déduire que F est C^1 et calculer sa dérivée.

2. On considère la fonction F définie sur $J =]1, +\infty[$ par

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{(\ln t)^2}.$$

Étudier le sens de variation de F sur J .

3. En utilisant la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{(\ln t)^2}$ sur $I =]1, +\infty[$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

4. En utilisant l'inégalité $0 < \ln t \leq t - 1$ pour $t \in I$, déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[427]

Exercice 25 ★★★★★ **Intégration par parties - Niveau 3 –**

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \quad I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt \quad 2. \quad J = \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx \quad 3. \quad K = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[399]

Exercice 26 ★★ **Changements de variables - Recherche de primitives - Niveau 2 –**

En effectuant un changement de variables, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \cos(2 \ln x)$;

2. $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$;

$$3. x \mapsto \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[395]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Utiliser les théorèmes du cours, et notamment comment calculer la dérivée d'une application bilinéaire.
 - 2.
-

Indication pour l'exercice 2 ▲

Dérivée d'une fonction composée.

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Appliquer la formule donnant la dérivée d'un déterminant. Il y a beaucoup de termes qui vont s'annuler.
 2. Procéder par récurrence.
-

Indication pour l'exercice 4 ▲

Appliquer l'égalité des accroissements finis à la fonction réelle ϕ .

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. A_ε est fermé.
 2. Raisonner par l'absurde.
 - 3.
-

Indication pour l'exercice 6 ▲

Utiliser que p est une application linéaire.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Utiliser une projection $p : E \rightarrow F$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Écrire $f(t)$ sous forme intégrale.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Commencer par α .
 2. Linéarité de l'intégrale.
 - 3.
 4. Pythagore.
 5. Utiliser un résultat sur les intégrales des fonctions à valeurs réelles.
 - 6.
-

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Utiliser un argument de connexité (par arcs).
 2. Étudier la fonction $g(t) = f(t)e^{-i\alpha(t)}$.
-

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre x et $x + h$ à l'ordre 1.
 2. Optimiser en fonction de h .
-

Indication pour l'exercice 12 ▲

Écrire l'équation de la tangente à la première courbe au point d'abscisse a , et l'équation de la tangente à la deuxième courbe au point d'abscisse b . Quelle condition faut-il mettre sur a et b pour que les deux tangentes soient identiques ?

Indication pour l'exercice 13 ▲

On pourra procéder par récurrence finie sur l'ordre de dérivation.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Commencer par démontrer que f' vérifie les mêmes hypothèses. On pourra supposer que la suite (x_n) est strictement décroissante.

Indication pour l'exercice 15 ▲

- 1.
 2. Utiliser la définition du nombre dérivé en a et b .
 3. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
 4. Appliquer le théorème des accroissements finis.
 - 5.
 6. Pour prouver la dérivabilité en 0, on revient à la définition.
-

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Procéder par récurrence.
2. Montrer par récurrence sur n que f est de classe C^n . On pourra utiliser que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

pour tout polynôme P .

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. C'est l'inégalité de Taylor-Lagrange.
 2. Translater la fonction de $1/2\lambda$.
-

Indication pour l'exercice 18 ▲

1. Quelle est l'image de la fonction sinus ?
 2. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
 3. Calculer la dérivée.
 4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis.
-

Indication pour l'exercice 19 ▲

Dériver la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Indication pour l'exercice 20 ▲

- 1.
 2. Dériver.
 3. Dériver encore, mais par rapport à y .
-

Indication pour l'exercice 21 ▲

Utiliser la fonction exponentielle pour se ramener à une somme de Riemann.

Indication pour l'exercice 22 ▲

Couper l'intégrale en deux parties : de 0 à $1 - \varepsilon$ puis de $1 - \varepsilon$ à 1.

Indication pour l'exercice 23 ▲

Fixer $\varepsilon > 0$ et A tel que $|f(x) - a| < \varepsilon$ pour $x > A$. Couper l'intégrale en A .

Indication pour l'exercice 24 ▲

1. Introduire $f(x) = \int_a^x h(t)dt$ et écrire F en fonction de f .
 2. Calculer la dérivée de F sur I comme à la question précédente.
 3. Encadrer $\frac{1}{(\ln t)^2}$ pour $t \in [x, x^2]$.
 4. Utiliser l'inégalité proposée par l'énoncé...
-

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. Intégrer par parties, puis réaliser une décomposition en éléments simples.
 2. Intégrer par parties (deux fois). Un bon choix d'une primitive peut simplifier les calculs.
 3. Intégrer par parties entre $a > 0$ et 1. Faire tendre a vers 0 tout à la fin...
-

Indication pour l'exercice 26 ▲

1. Poser $u = \ln x$.
 2. Poser $u = \sqrt{x}$.
 3. Poser $u = \sqrt{e^x - 1}$.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Notons $L(M) = M^T$ et $B(M, N) = MN$. Alors L est une application linéaire et B est une application bilinéaire. De plus, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = B(M(t), L(M(t))).$$

Par composée, ϕ est dérivable. De plus,

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= B(M'(t), L(M(t))) + B(M(t), L(M'(t))) \\ &= M'(t)M(t)^T + M(t)M'(t)^T.\end{aligned}$$

2. On sait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = I_n$. Ainsi, la dérivée de ϕ est nulle et

$$M'(t)M(t)^T + M(t)M'(t)^T = 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'autre part,

$$(M'(t)M(t)^T)^T = M(t)M'(t)^T.$$

On déduit de ces deux résultats que

$$M'(t)M(t)^T = -(M'(t)M(t)^T)^T$$

ce qui prouve que $M'(t)M(t)^T$ est antisymétrique.

Correction de l'exercice 2 ▲

Pour tout $t \in I$, on a $g(t) = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle}$. La fonction racine carrée étant dérivable sur $]0, +\infty[$ (de dérivée $x \mapsto 1/2\sqrt{x}$) et la fonction $t \mapsto \langle f(t), f(t) \rangle$ étant dérivable sur I , de dérivée $2\langle f(t), f'(t) \rangle$, on en déduit par composition la dérivabilité de g sur I . De plus, pour tout $t \in I$, on a

$$g'(t) = \frac{2\langle f(t), f'(t) \rangle}{2\sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle}} = \frac{\langle f(t), f'(t) \rangle}{\|f(t)\|}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Notons \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^n et $C_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x, x^2/2!, \dots, x^n/n!)$. Alors C_n est de classe \mathcal{C}^∞ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$D_n(x) = \det_{\mathcal{B}}(C_n(x), C'_n(x), \dots, C_n^{(n-1)}(x)).$$

Puisque \det est multilinéaire, la fonction D_n est de classe \mathcal{C}^∞ . En particulier, elle est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}D'_n(x) &= \det_{\mathcal{B}}(C'_n(x), C'_n(x), \dots, C_n^{(n-1)}(x)) + \det_{\mathcal{B}}(C_n(x), C''_n(x), C''_n(x), \dots, C_n^{(n-1)}(x)) \\ &\quad + \dots + \det_{\mathcal{B}}(C_n(x), C'_n(x), \dots, C_n^{(n-1)}(x), C_n^{(n-1)}(x)) \\ &\quad + \det_{\mathcal{B}}(C_n(x), \dots, C_n^{(n-2)}(x), C_n^{(n)}(x)).\end{aligned}$$

Tous ces déterminants, sauf le dernier, ont deux colonnes identiques et sont donc nulles. On a donc

$$D'_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2/2 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & 1 \end{vmatrix} = D_{n-1}(x).$$

2. On remarque que $D_n(0) = 0$ et que $D_1(x) = x$. On démontre alors par une récurrence laissée au lecteur que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$D_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

La fonction $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\phi(b) - \phi(a) = (b - a)\phi'(c).$$

Mais $\phi'(c) = \langle f(b) - f(a), f'(c) \rangle$ et donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\phi'(c) \leq \|f(b) - f(a)\| \times \|f'(c)\|.$$

D'autre part,

$$\phi(b) - \phi(a) = \|f(b) - f(a)\|^2.$$

On en déduit le résultat voulu.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Puisque $a \in A_\varepsilon$, A_ε est une partie non vide de \mathbb{R} . Elle est majorée par b donc elle admet une borne supérieure. De plus, par continuité de f et de g , A_ε est une partie fermée de \mathbb{R} , donc sa borne supérieure est élément de A_ε .

2. Posons $c = \sup A_\varepsilon$ et supposons $c < b$. Alors on sait que

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a).$$

De plus, puisque $\|f'(c)\| \leq g'(c)$, en revenant à la définition du nombre dérivée en terme de limite de taux d'accroissement, on en déduit qu'il existe $d \in]c, b]$ tel que, pour tout $t \in]c, d]$,

$$\frac{\|f(t) - f(c)\|}{t - c} \leq \frac{g(t) - g(c)}{t - c} + \varepsilon \implies \|f(t) - f(c)\| \leq g(t) - g(c) + \varepsilon(t - c).$$

On en conclut que

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(a)\| &\leq \|f(t) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leq g(t) - g(c) + \varepsilon(t - c) + g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) \\ &\leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a). \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $t \in]c, d]$ et aussi pour tout $t \in [a, c]$. Ainsi, $d \in A_\varepsilon$ ce qui contredit que $c = \sup A_\varepsilon$. On en déduit que $\sup A_\varepsilon = b$.

3. La question précédente nous dit que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b - a).$$

Faisant tendre ε vers 0, on en déduit le résultat.

Correction de l'exercice 6 ▲

Puisque p est une application linéaire, on a

$$\begin{aligned} p\left(\int_0^{1/2} f(t) dt\right) &= \int_0^{1/2} p(f(t)) dt \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + 2t\right) dt \\ &= [\arcsin(t) + t^2]_0^{1/2} \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit G un supplémentaire de F dans E et p la projection sur F parallèlement à G . En particulier, pour tout $x \in E$, on a $p(x) \in F$. On sait que plus que, pour tout $x \in E$, $x \in F$ si et seulement si $p(x) = x$. Or,

$$p\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b p(f(t))dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Ceci prouve le résultat demandé.

Correction de l'exercice 8 ▲

Posons $M = \sup_{t \in [a,b]} \|f'(t)\|$ et écrivons que $f(t) = \int_a^t f'(x)dx$. Alors on a

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(t)dt \right\| &\leq \int_a^b \int_a^t \|f'(x)\| dx dt \\ &\leq \int_a^b \int_a^t M dx dt \\ &\leq \int_a^b M(t-a) dt \\ &\leq M \frac{(b-a)^2}{2}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. On sait que $\alpha(t) = \langle f(t), u \rangle$, et donc α est continue. Par différence, v est continue. On peut aussi dire que α est continue car c'est une fonction composante de f dans la base (u, u^\perp) où u^\perp est un vecteur unitaire orthogonal à u .

2. Par linéarité de l'intégrale,

$$\langle u, \int_a^b v(t)dt \rangle = \int_a^b \langle u, v(t) \rangle dt = \int_a^b 0 dt = 0.$$

3. On a d'une part

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \alpha(t)dt u + \int_a^b v(t)dt$$

et d'autre part

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \|f(t)\| dt u.$$

On déduit de la question précédente que $\int_a^b \alpha(t)dt = \int_a^b \|f(t)\| dt$.

4. Par le théorème de Pythagore, on sait que $\|f(t)\|^2 = \alpha(t)^2 + \|v(t)\|^2$ ce qui donne le résultat.

5. Posons $g(t) = \|f(t)\| - \alpha(t)$. Alors g est une fonction continue sur $[a, b]$, positive et d'intégrale nulle. On en déduit que, pour tout $t \in [a, b]$, $g(t) = 0$ ou encore que $\alpha(t) = \|f(t)\|$. On a donc prouvé que $f(t) = \|f(t)\|u + v(t)$, mais d'après le résultat de la question 4., on a aussi $\|v(t)\| = 0$ pour tout $t \in [a, b]$, et donc $v(t) = 0$. On obtient donc exactement le résultat voulu.

6. Non, un contre-exemple est donnée par $E = \mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, avec $f(t) = (t, 1)$ pour $t \in [0, 1]$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Soit $t \in I$. Alors si $e^{i\alpha_1(t)} = e^{i\alpha_2(t)}$, il existe $k_t \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha_1(t) = \alpha_2(t) + 2k_t\pi$. Il ne faut pas oublier de rendre ce k_t indépendant de t . Mais $\alpha_1 - \alpha_2$ est une fonction continue à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$. Or, elle doit envoyer le connexe par arcs I sur un connexe par arcs de \mathbb{R} . Les connexes par arcs de \mathbb{R} étant les intervalles, ceci n'est possible que s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $t \in I$, $\alpha_1(t) = \alpha_2(t) + 2k\pi$.

2. Remarquons d'abord que, puisque la fonction f'/f est de classe \mathcal{C}^{n-1} sur I , la fonction α ainsi définie est de classe \mathcal{C}^n sur I , sa dérivée étant donnée par

$$\alpha'(t) = \frac{1}{i} \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Considérons maintenant la fonction g définie sur I par $g(t) = f(t)e^{-i\alpha(t)}$. Elle est dérivable sur I et sa dérivée est

$$g'(t) = f'(t)e^{i\alpha(t)} - if(t)\alpha'(t)e^{i\alpha(t)} = 0.$$

Ainsi, g est constante, mais $g(t_0) = 1$ et donc on a bien prouvé que pour tout $t \in I$, $f(t) = e^{i\alpha(t)}$. Reste à prouver que α est à valeurs réelles. Mais ceci se déduit du fait que

$$1 = |f(t)| = e^{\operatorname{Re}(i\alpha(t))} = e^{-\operatorname{Im}(\alpha(t))}.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre x et $x+h$ à l'ordre 1 :

$$\|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| \leq \frac{h^2 \|f''\|_\infty}{2}.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\|hf'(x)\| \leq \|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| + \|f(x+h)\| + \|f(x)\| \leq 2\|f\|_\infty + \frac{h^2 \|f''\|_\infty}{2}.$$

2. Posons, pour $h > 0$, $\phi(h) = \frac{2\|f\|_\infty}{h} + \frac{h\|f''\|_\infty}{2}$. En calculant la dérivée de cette fonction, on voit qu'elle admet un minimum en $h = 2\sqrt{\|f\|_\infty/\|f''\|_\infty}$. L'inégalité de la question précédente appliquée en cette valeur de h donne exactement ce que l'on veut.

Correction de l'exercice 12 ▲

Écrivons l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse a : il s'agit de

$$y - a^2 = 2a(x - a) \iff y = 2ax - a^2.$$

De même, écrivons l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = 1/x$ au point d'abscisse b : il s'agit de

$$y - \frac{1}{b} = -\frac{1}{b^2}(x - b) \iff y = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}.$$

Pour que les deux tangentes coïncident, il faut que a et b vérifient

$$\begin{cases} 2a &= \frac{-1}{b^2} \\ -a^2 &= \frac{2}{b}. \end{cases}$$

On en déduit que $-8a = a^4$, ce qui donne $a = 0$ ou $a = -2$. La solution $a = 0$ est à exclure, car on ne peut pas déterminer de valeur correspondante pour b . Pour $a = -2$, on obtient $b = -1/2$, et on vérifie facilement que les tangentes en a et en b coïncident.

Correction de l'exercice 13 ▲

On va procéder pour les deux questions par récurrence, le principal problème étant de trouver la bonne hypothèse de récurrence.

1. Posons, pour $0 \leq k \leq n$, l'hypothèse \mathcal{P}_k : " $f^{(k)}$ s'annule en $n+1-k$ points distincts de $[a, b]$, et même de $]a, b[$ si $k \geq 1$ ".

La propriété est vraie au rang $k = 0$, par hypothèse. Supposons la propriété vraie au rang $k < n$ et prouvons la au rang $k + 1$. Soient $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1-k} \leq b$ des réels tous distincts de sorte que $f^{(k)}(a_i) = 0$ pour tout i . Appliquons le théorème de Rolle à la fonction $g = f^{(k)}$ sur les intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, avec $1 \leq i \leq n - k$. On obtient des réels b_i , avec $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tels que $f^{(k+1)}(b_i) = g'(b_i) = 0$. De plus, ces réels sont distincts car

$$b_i < a_{i+1} < b_{i+1}$$

et ils sont tous dans l'intervalle $]a, b[$ puisque $a \leq a_1 < b_1$ et $b_{n-k} < a_{n+1-k} < b$. \mathcal{P}_{k+1} est donc vraie.

Par le principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie, et c'est exactement ce que l'on voulait démontrer.

2. La propriété est vraie au rang $k = 0$, par hypothèse.

3. Supposons la propriété vraie au rang $k < n$ et prouvons la au rang $k + 1$. Soient $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1-k} \leq b$ des réels tous distincts de sorte que $f^{(k)}(a_i) = 0$ pour tout i . Appliquons le théorème de Rolle à la fonction $g = f^{(k)}$ sur les intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, avec $1 \leq i \leq n - k$. On obtient des réels b_i , avec $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tels que $f^{(k+1)}(b_i) = g'(b_i) = 0$. De plus, ces réels sont distincts car

$$b_i < a_{i+1} < b_{i+1}$$

et ils sont tous dans l'intervalle $]a, b[$ puisque $a \leq a_1 < b_1$ et $b_{n-k} < a_{n+1-k} < b$. \mathcal{P}_{k+1} est donc vraie.

4. On introduit cette fois, pour $0 \leq k \leq n$, l'hypothèse de récurrence \mathcal{P}_k : " $f^{(k)}$ s'annule en b_k avec $a < b_k$ et $b_k < b$ si $k \geq 1$ ". \mathcal{P}_0 est clairement vérifiée, et si \mathcal{P}_k est vérifiée pour $0 \leq k < n$, alors posons $g = f^{(k)}$. On sait que $g(a) = 0$ et que $g(b_k) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe $b_{k+1} \in]a, b_k[\subset]a, b[$ de sorte que

$$f^{(k+1)}(b_{k+1}) = g'(b_k) = 0.$$

\mathcal{P}_{k+1} est donc vérifiée. Par le principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vérifiée, et c'est exactement ce que l'on voulait prouver !

Correction de l'exercice 14 ▲

On va commencer par démontrer que f' vérifie les mêmes hypothèses que f . En effet, f' est \mathcal{C}^∞ . Puisque la suite (x_n) tend vers 0 et que x_n n'est jamais égal à 0, on peut extraire de (x_n) une sous-suite strictement décroissante. Pour tout $n \geq 0$, on applique alors le théorème de Rolle à f entre x_{n+1} et x_n : il existe $u_n \in]x_{n+1}, x_n[$ telle que $f'(u_n) = 0$. Par le théorème des gendarmes, la suite (u_n) tend vers 0 sans jamais être nulle. Par une récurrence immédiate, on démontre alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(k)}$ vérifie les mêmes hypothèses. En particulier, il existe une suite (y_n) qui tend vers 0 et telle que $f^{(k)}(y_n) = 0$ pour tout entier naturel n . Puisque $f^{(k)}$ est continue, on obtient $f^{(k)}(0) = 0$.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. f' n'est pas toujours continue.

2. Soit $\varepsilon = \min(z - f'(a), f'(b) - z)$. On suppose sans perte de généralité que $a < b$. Par définition de la limite et de la dérivabilité à droite en a , il existe $\alpha_1 > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \alpha_1[$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq f'(a) + \varepsilon \leq z.$$

De même, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \alpha_2[$,

$$\frac{f(b+h) - f(b)}{h} \geq f'(b) - \varepsilon \geq z.$$

Il suffit de prendre $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$.

3. On fixe h dans $]0, \alpha[$. Soit ϕ la fonction :

$$\phi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Cette fonction est continue, et $z \in]\phi(a), \phi(b)[$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y \in I$ tel que $\phi(y) = z$.

4. Par le théorème des accroissements finis, il existe x dans $[y, y+h]$ tel que $f'(x) = \frac{f(y+h)-f(y)}{h} = z$.
5. On vient de démontrer que si on prend deux éléments quelconques $f'(a)$ et $f'(b)$ de $f'(I)$ avec $f'(a) < f'(b)$, et si on prend $z \in]f'(a), f'(b)[$, alors $z \in f'(I)$: c'est bien que $f'(I)$ est un intervalle.
6. Il est évident que f est dérivable sur $]0, 1]$. Pour prouver la dérivabilité en 0, on revient à la définition :

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| \leq h |\sin(1/h^2)| \leq h.$$

f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. Remarquons que si $x > 0$, on a :

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Posant $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$, on a $u_n \rightarrow 0$ alors que $f'(u_n) \rightarrow -\infty$: f' n'est pas continue en 0. Enfin, on a $f'([0, 1]) =$, ce qui donne une autre preuve que f' n'est pas continue puisque l'image d'un segment n'est pas forcément un segment !

Correction de l'exercice 16 ▲

1. La fonction exponentielle est C^∞ sur \mathbb{R} et $x \mapsto 1/x$ est C^∞ sur $]0, +\infty[$. On en déduit par le théorème de composition que f est C^∞ sur $]0, +\infty[$. Prouvons la formule demandée par récurrence sur n . Elle est trivialement vérifiée si $n = 0$. Supposons la vraie au rang n et prouvons-la au rang $n + 1$. Par le théorème de dérivation d'une fonction composée :

$$f^{(n+1)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} P_n \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2} P'_n \left(\frac{1}{x} \right) \right) = e^{-\frac{1}{x}} P_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right)$$

où $P_{n+1}(X) = X^2 P_n(X) - X^2 P'_n(X)$.

2. La première chose à remarquer est que, par comparaison des polynômes et de l'exponentielle au voisinage de $-\infty$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} P \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

pour tout polynôme P . On démontre alors par récurrence sur n que f est C^n sur \mathbb{R} tout entier. C'est clair pour $n = 0$, en appliquant la propriété précédente avec $P = 1$. Supposons que f soit de classe C^n , avec $f^{(n)}(0) = 0$. Pour montrer que f est C^{n+1} il suffit de vérifier que $f^{(n)}$ est dérivable en 0. Mais, pour $x > 0$, on a

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x} P_n \left(\frac{1}{x} \right) \rightarrow 0$$

si $x \rightarrow 0^+$ par la propriété précédente pour $P = X P_n$. Ainsi, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$. Une preuve alternative consiste à utiliser le théorème de prolongement d'une dérivée. En effet, puisque $f^{(n+1)x}$ admet comme limite 0 quand $x \rightarrow 0$, ce théorème nous dit que $f^{(n)}$ est dérivable en 0, que $f^{(n+1)}$ est continue en 0 avec $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Soit $x \in]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre 0 et x à l'ordre n . Comme f et toutes ses dérivées en 0 sont nulles, on obtient que

$$|f(x)| \leq \frac{\sup_{[0,x]} |f^{(n)}| |x|^n}{n!} \leq (\lambda |x|)^n.$$

Maintenant, $|x|\lambda < 1$, et il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ pour déduire que $f(x) = 0$.

2. On va procéder de proche en proche en translatant la fonction pour montrer qu'elle est nulle sur des intervalles de plus en plus gros. Ainsi, posons $g(x) = f(x + 1/2\lambda)$. Alors g vérifie les mêmes hypothèses que f , et donc d'après le résultat de la première question, elle est nulle sur $]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$. Revenant à f , ceci signifie que f est nulle sur $]-\frac{1}{\lambda}, \frac{3}{2\lambda}[$. En considérant successivement les fonctions $g_n(x) = f(x + n/2\lambda)$, on va prouver que

f est nulle sur $]-\frac{1}{\lambda}, \frac{n+1}{\lambda}[$, et ce pour tout n , donc sur $]-\frac{1}{\lambda}, +\infty[$. Pour la partie négative, il suffit de considérer cette fois les fonctions $h_n(x) = f(x - n/2\lambda)$.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. L'image de \mathbb{R} par $\sin(1/x)$ étant égale à $[-1, 1]$, on en déduit que $f(\mathbb{R}^*) = [3/4, 5/4] = I$. I est stable par f car $f(I) \subset f(\mathbb{R}^*) = I$.

2. On a $f(3/4) \geq 3/4$ et $f(5/4) \leq 5/4$ puisque I est stable par f . Posons alors $g(x) = f(x) - x$. g est continue, $g(3/4) \geq 0$ et $g(5/4) \leq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\gamma \in I$ tel que $g(\gamma) = 0$, ou encore $f(\gamma) = \gamma$.

3. On calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = -\frac{1}{4x^2} \cos \frac{1}{x},$$

formule valable sur I . Or, pour tout $x \in I$, on a

$$|f'(x)| \leq \frac{16}{4 \times 9} = \frac{4}{9} < 1.$$

4. Notons $k = 4/9$. On démontre par récurrence sur n que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|u_n - \gamma| \leq k^{n-1} |u_1 - \gamma|.$$

C'est vrai si $n = 1$. Supposons que c'est vrai au rang $n \geq 1$ et prouvons-le au rang $n + 1$. On remarque que, puisque $u_1 \in I$ et que I est stable par f , alors $u_n \in I$. Il suffit alors d'écrire

$$|u_{n+1} - \gamma| = |f(u_n) - f(\gamma)| \leq k |u_n - \gamma| \leq k^n |u_1 - \gamma|$$

pour le prouver au rang $(n + 1)$. On déduit alors du théorème des gendarmes que $(u_n - \gamma)$ tend vers 0, c'est-à-dire que (u_n) tend vers γ .

Correction de l'exercice 19 ▲

Posons $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors F est identiquement nulle. De plus, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, F est dérivable, et sa dérivée est f . On a donc $F'(x) = f(x) = 0$, puisque $F \equiv 0$, ce qu'il fallait démontrer. On peut aussi procéder sans ce théorème en utilisant un raisonnement par l'absurde. Supposons en effet que f n'est pas identiquement nulle. On peut trouver un c dans $[a, b]$ tel que $f(c) \neq 0$. Pour fixer les idées, on peut supposer $f(c) > 0$. Mais alors, par continuité de f , on peut trouver un intervalle $[\alpha, \beta]$ autour de c , avec $\alpha < \beta$, tel que $f(x) \geq f(c)/2$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$. On obtient

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq (\beta - \alpha) \frac{f(c)}{2} > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Correction de l'exercice 20 ▲

1. f étant continue et injective sur l'intervalle $[0, +\infty[$, elle y est strictement monotone. Si elle était décroissante, on aurait $f(x) \leq f(0)$ et donc les valeurs supérieures à $f(0)$ ne seraient pas atteintes. Remarquons aussi que $f(0) = 0$.

2. Posons

$$g(x) = xf(x) - \int_0^x f(t)dt - \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt.$$

On va dériver ceci par rapport à x . Ceci ne pose pas de difficultés, sauf pour la dernière partie. Posant $u(x) = \int_0^x f^{-1}(t)dt$, on doit dériver $u \circ f$. On trouve donc

$$g'(x) = xf'(x) + f(x) - f(x) - f'(x)f^{-1}(f(x)) = xf'(x) - xf'(x) = 0.$$

Comme de plus $g(0) = 0$, g est identiquement nulle ce qui donne le résultat voulu.

3. On fixe $x \in \mathbb{R}_+$, et on pose

$$h(y) = xy - \int_0^x f(t)dt - \int_0^y f^{-1}(t)dt.$$

h est dérivable et on a

$$h'(y) = x - 0 - f^{-1}(y).$$

Or, f est strictement croissante, et donc $f^{-1}(y) < x$ ssi $y < f(x)$ et $f^{-1}(y) > x$ ssi $y > f(x)$. La fonction h est donc strictement croissante sur $[0, f(x)]$, et strictement décroissante sur $[f(x), +\infty[$. Comme $h(f(x)) = 0$ d'après la question précédente, on trouve bien que

$$xy \leq \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t)dt$$

avec égalité si et seulement si $y = f(x)$.

Correction de l'exercice 21 ▲

On va se ramener à une somme de Riemann en utilisant la fonction exponentielle. On écrit donc

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (k+n)^{1/n} \\ &= \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{1}{n} \ln(k+n)\right) \\ &= \frac{1}{n} \exp\left(\frac{1}{n} (\ln(1+n) + \dots + \ln(n+n))\right) \\ &= \frac{1}{n} \exp\left(\frac{1}{n} \left(\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + \dots + \ln\left(n\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} \exp\left(\frac{1}{n} \left(n \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} \exp(\ln n) \exp\left(\frac{1}{n} \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n} \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

On pose $f(x) = \ln(x)$, fonction continue sur $[1, 2]$, et on considère $S_n(f)$ la n -ième somme de Riemann de f entre 1 et 2. On a

$$v_n = \exp(S_n(f)).$$

Par le théorème des sommes de Riemann, on a

$$S_n(f) \rightarrow \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 \ln(x)dx.$$

Or,

$$\int_1^2 \ln(x)dx = [x \ln x - x]_1^2 = 2 \ln 2 - 1.$$

Par le théorème de composition des limites, on trouve finalement que (v_n) converge vers $\exp(2 \ln 2 - 1) = 4/e$.

Correction de l'exercice 22 ▲

Soit $\varepsilon > 0$ (vérifiant aussi $\varepsilon < 1$). Posons $\alpha = f(1 - \varepsilon)$. Alors, pour tout $x \in [0, 1 - \varepsilon]$, on a $0 = f(0) \leq f(x) \leq f(1 - \varepsilon) = \alpha$. De plus, la suite (α^n) tend vers 0, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $0 \leq \alpha^n \leq \varepsilon$. On en déduit que, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^1 (f(t))^n dt &= \int_0^{1-\varepsilon} (f(t))^n dt + \int_{1-\varepsilon}^1 (f(t))^n dt \\ &\leq (1 - \varepsilon) \alpha^n + \int_{1-\varepsilon}^1 1^n dt \\ &\leq \alpha^n + \varepsilon \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

Correction de l'exercice 23 ▲

Soit $\varepsilon > 0$ et $A \geq 0$ tel que $|f(x) - a| < \varepsilon$. Pour $x > A$, on coupe l'intégrale en A .

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^A f(t) dt + \frac{1}{x} \int_A^x f(t) dt.$$

On peut trouver x_0 assez grand tel que, pour tout $x > x_0$, on a

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^A f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{x} \int_A^x (a - \varepsilon) dt \leq \frac{1}{x} \int_A^x f(t) dt \leq \frac{1}{x} \int_A^x (a + \varepsilon) dt$$

ce qui implique

$$\frac{(a - \varepsilon)(x - A)}{x} \leq \frac{1}{x} \int_A^x f(t) dt \leq \frac{(x - A)(a + \varepsilon)}{x}.$$

Il est alors possible de trouver x_1 tel que, pour tout $x > x_1$, on a

$$a - 2\varepsilon \leq \frac{(a - \varepsilon)(x - A)}{x} \text{ et } \frac{(x - A)(a + \varepsilon)}{x} \leq a + 2\varepsilon.$$

Pour $x > \max(x_0, x_1)$, on a donc

$$-3\varepsilon \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - a \leq 3\varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat voulu.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. Soit a un élément de J . On introduit $f(x) = \int_a^x h(t) dt$. On peut remarquer que

$$F(x) = \int_a^{v(x)} h(t) dt - \int_a^{u(x)} h(t) dt = f(v(x)) - f(u(x)).$$

Par composition, F est C^1 et

$$F'(x) = v'(x)f'(v(x)) - u'(x)f'(u(x)) = v'(x)h(v(x)) - u'(x)h(u(x)).$$

2. On est tout à fait dans le cadre de la question précédente, avec $u(x) = x$, $v(x) = x^2$ et $h(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$. F est donc de classe C^1 sur J et sa dérivée vaut

$$F'(x) = \frac{2x}{(\ln(x^2))^2} - \frac{1}{(\ln x)^2} = \frac{x - 2}{2(\ln x)^2}.$$

On en déduit que F est décroissante sur $]1, 2]$, puis croissante sur $[2, +\infty[$.

3. Pour $x \in J$, on a $x \leq x^2$. De plus, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(\ln t)^2}$ est décroissante sur l'intervalle $[x, x^2]$. On en déduit que pour tout $x \in [x, x^2]$, on a

$$\frac{1}{(\ln x^2)^2} \leq \frac{1}{(\ln t)^2} \leq \frac{1}{(\ln x)^2}.$$

On intègre cette inégalité entre x et x^2 , et on trouve

$$\frac{x^2 - x}{(\ln x^2)^2} \leq F(x) \leq \frac{x^2 - x}{(\ln x)^2}.$$

Par croissance comparée du logarithme et des fonctions puissance, on en déduit que F tend vers $+\infty$ si x tend vers $+\infty$.

4. D'après l'inégalité indiquée par l'énoncé, on sait que, pour tout $t > 1$, on a

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \geq \frac{1}{(t-1)^2}.$$

On intègre cette inégalité entre x et x^2 , pour $x \in I$ (remarquons qu'on a bien alors $x \leq x^2$), et on trouve

$$F(x) \geq \left[\frac{-1}{t-1} \right]_x^{x^2} = \frac{x}{x^2-1}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^+} x/(x^2-1) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = +\infty$.

Correction de l'exercice 25 ▲

1. On commence par intégrer par parties en posant $u'(t) = \frac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln(1+t)$, ce qui donne $u(t) = -\frac{1}{t}$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t}$. On obtient donc

$$I = \left[-\frac{\ln(1+t)}{t} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) + \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}.$$

On calcule la dernière intégrale en réalisant une décomposition en éléments simples. Plus précisément, on remarque que

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Ainsi il vient

$$\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^2 = 2\ln(2) - \ln(3).$$

Finalement, on trouve

$$I = -\frac{3\ln(3)}{2} + 3\ln(2).$$

2. On intègre par parties, en posant $u'(x) = x$ et $v(x) = (\arctan x)^2$. On a $v'(x) = \frac{2\arctan(x)}{x^2+1}$, et ceci nous incite à considérer comme primitive de u' la fonction $u(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$, ce qui va simplifier les calculs. On obtient alors

$$J = \frac{1}{2} [(x^2+1)(\arctan x)^2]_0^1 - \int_0^1 \arctan x dx.$$

On calcule la dernière intégrale en réalisant à nouveau une intégration par parties, et on trouve :

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi^2}{16} - [x \arctan x]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

3. La fonction $f : x \mapsto \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$ est continue sur $]0, 1]$, et elle tend vers 0 en 0. On peut donc la prolonger par continuité à $[0, 1]$ en posant $f(0) = 0$, ce qui donne un sens à K . Pour calculer cette intégrale, on va intégrer par parties entre $a > 0$ et 1, pour ne pas être gêné par les problèmes en 0. On pose donc $K(a) = \int_a^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$, puis :

$$\begin{aligned} u(x) &= (\ln x) & v'(x) &= \frac{x}{(x^2+1)^2} \\ u'(x) &= \frac{1}{x} & v(x) &= -\frac{1}{2(x^2+1)} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$K(a) = \left[-\frac{\ln x}{2(x^2+1)} \right]_a^1 + \frac{1}{2} \int_a^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

De plus,

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

de sorte que

$$\int_a^1 \frac{dx}{x(x^2+1)} = \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_a^1 = -\frac{1}{2} \ln 2 - \ln(a) + \frac{1}{2} \ln(1+a^2).$$

On obtient donc que

$$K(a) = \frac{\ln a}{2(a^2+1)} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln a}{2} + \frac{1}{4} \ln(1+a^2).$$

Reste à faire tendre a vers 0. Pour cela, on factorise par $\ln a$, et on trouve

$$K(a) = \frac{-a^2 \ln(a)}{2(a^2+1)} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+a^2).$$

Comme $a^2 \ln(a)$ tend vers 0 lorsque a tend vers 0, de même que $\ln(1+a^2)$, on conclut finalement que

$$K = -\frac{\ln 2}{4}.$$

Correction de l'exercice 26 ▲

1. La fonction $x \mapsto \cos(2\ln x)$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$, intervalle sur lequel on va chercher à calculer une primitive que l'on écrit $\int^t \cos(2\ln x) dx$. Pour cela, on effectue le changement de variables $u = \ln x$, de sorte que $du = \frac{dx}{x}$ ce qui donne $dx = x du = e^u du$. Ainsi, on trouve

$$\int^t \cos(2\ln x) dx = \int^{\ln t} e^u \cos(2u) du.$$

On calcule cette dernière primitive par les méthodes usuelles :

$$\begin{aligned} \int^t \cos(2\ln x) dx &= \int^{\ln t} \Re e \left(e^{(1+2i)u} \right) du \\ &= \Re e \left(\int^{\ln t} e^{(1+2i)u} du \right) \\ &= \Re e \left(\frac{e^{(1+2i)\ln x}}{1+2i} \right) \\ &= \frac{x}{5} \Re e \left(e^{2i\ln x} (1-2i) \right) \\ &= \frac{x}{5} (\cos(2\ln x) + 2\sin(2\ln(x))). \end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$, intervalle sur lequel on cherche à calculer une primitive sous la forme $\int^t \cos(\sqrt{x}) dx$. Pour cela, on effectue le changement de variables $u = \sqrt{x}$, de sorte que $x = u^2$ ou encore $dx = 2u du$. Lorsque $x = t$, on a $u = \sqrt{t}$. On trouve alors

$$\begin{aligned} \int^t \cos(\sqrt{x}) dx &= 2 \int^{\sqrt{t}} u \cos(u) du \\ &= 2[u \sin u]_{\sqrt{t}} - 2 \int^{\sqrt{t}} \sin(u) du \\ &= 2\sqrt{t} \sin(\sqrt{t}) + 2\cos(\sqrt{t}) \end{aligned}$$

(on a aussi effectué une intégration par parties). Une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ est donc la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x})$.

3. La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}$ est bien définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, intervalle sur lequel on va chercher une primitive, sous la forme $\int^t \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}} dx$. Pour cela, on va poser $u = \sqrt{e^x-1}$, de sorte que

$$du = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}} dx$$

et

$$3 + e^x = u^2 + 4.$$

Par ailleurs, si $x = t$, alors $u = \sqrt{e^t-1}$. On a donc

$$\int^t \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}} dx = 2 \int^{\sqrt{e^t-1}} \frac{du}{u^2+4}.$$

Comme une primitive de $\frac{2}{u^2+4}$ est $\arctan(u/2)$, on en déduit que

$$\int^t \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}} dx = \arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}\right).$$
